STATISTIQUES DE COMPTAGE
et
FLUCTUATIONS STATISTIQUES

1. Introduction

La décroissance radioactive est un processus aléatoire. Et par conséquent les mesures des rayonnements émis donnent lieu à des fluctuations statistiques qui représentent une source inévitable d'incertitude.

- L'importance de statistiques de comptage est l'analyse statistique des résultats expérimentaux des comptages nucléaires afin de calculer la précision de ces mesures.
- On distingue deux catégories générales de statistiques de comptage :
  - 1ère Catégorie : sert à la vérification du bon fonctionnement d'une expérience (ou d'un équipement) de comptage nucléaire. On effectue plusieurs mesures dans les mêmes conditions de manipulation. Les fluctuations de ces mesures sont quantifiées et comparées avec des modèles statistiques de prédiction (voir Application A).
  - 2ème Catégorie : c'est une situation avec une seule mesure, on utilise dans ce cas les statistiques de comptage pour prédire et déduire sa propre précision à partir d'un modèle statistique (voir Application B).
- On doit tout d'abord procéder par la présentation des méthodes permettant la caractérisation et l'organisation des données expérimentales afin de pouvoir décrire la quantité de fluctuation, ensuite on choisit le modèle statistique approprié.

2. Caractérisation et Organisation des Données Expérimentales

On suppose avoir une collection de N valeurs mesurées de la même quantité physique par un compteur de rayonnement pendant un intervalle de temps constant :

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_N$$

- Deux propriétés élémentaires de cet ensemble des données sont définies :
  - La somme : $\Sigma \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i$
  - La valeur moyenne expérimentale : $\bar{x}_e \equiv \Sigma / N$

- N'importe quel ensemble des données mesurées peut être présenté et organisé par une fonction très pratique appelée la fonction de la **Distribution des Fréquences** *F(x)* :

$$F(x) \equiv \frac{\text{Nombre d'occurrences de la valeur x}}{\text{Nombre des mesures } (= \text{N})}$$

Cette fonction est normalisée : $\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1$

• Il est possible de calculer la valeur expérimentale en fonction de la distribution de fréquences :

$$\bar{x}_e = \sum_{x=0}^{\infty} x\, F(x)$$

• L'écart (ou le résiduel) d_i entre n'importe quel point de mesure x_i et la valeur moyenne expérimentale est : $d_i \equiv x_i - \bar{x}_e$

Données		Fonction de Distribution de Fréquences	
8	14	$F(3)= 1/20$	$= 0.05$
5	8	$F(4)$	$= 0$
12	8	$F(5)$	$= 0.05$
10	3	$F(6)$	$= 0.10$
13	9	$F(7)$	$= 0.10$
7	12	$F(8)$	$= 0.20$
9	6	$F(9)$	$= 0.10$
10	10	$F(10)$	$= 0.15$
6	8	$F(11)$	$= 0.05$
11	7	$F(12)$	$= 0.10$
		$F(13)$	$= 0.05$
		$F(14)$	$= 0.05$
		$\sum_{x=0}^{\infty} F(x)$	$= 1.00$

Tableau 1 : Exemple de fonction de distribution de 20 données indépendantes

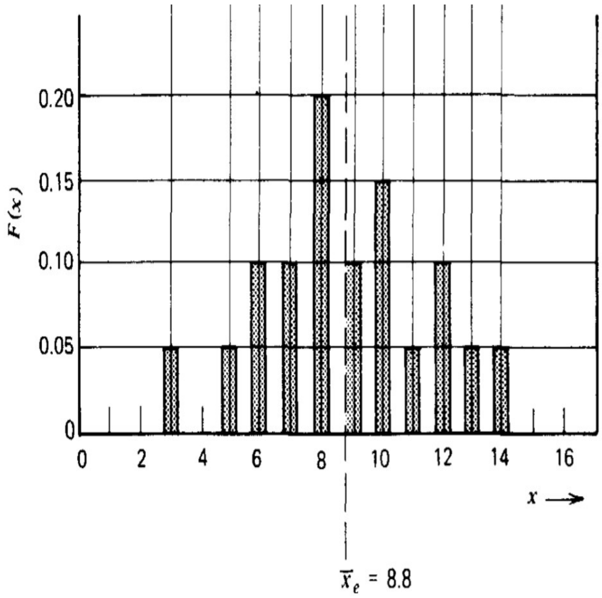


Figure 1 : Fonction de distribution des données du Tableau1.

• La déviation ϵ_i est définie par la différence entre une valeur mesurée et la valeur moyenne réelle $\bar{x}$:

$$\epsilon_i \equiv x_i - \bar{x}$$

• La variance s est un paramètre important qui traduit la fluctuation interne et l'écartement des valeurs mesurées par rapport à la moyenne. Elle reflète la largeur de la distribution. Elle est définie par la moyenne des carrés des déviations :

$$s^2 \equiv \overline{\epsilon^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

• La valeur exacte de la moyenne réelle $\bar{x}$ n'est jamais connue exactement. La définition précédente de la variance est exprimée alors en fonction de l'écart par rapport à la moyenne expérimentale :

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_e)^2$$

Le dénominateur de la variance est égal à N-1 dans le cas de petit nombre de mesures N.

• La variance est peut être exprimée en fonction de la distribution de fréquences, par :

$$s^2 = \sum_{x=0}^{\infty}(x - \bar{x})^2 F(x)$$

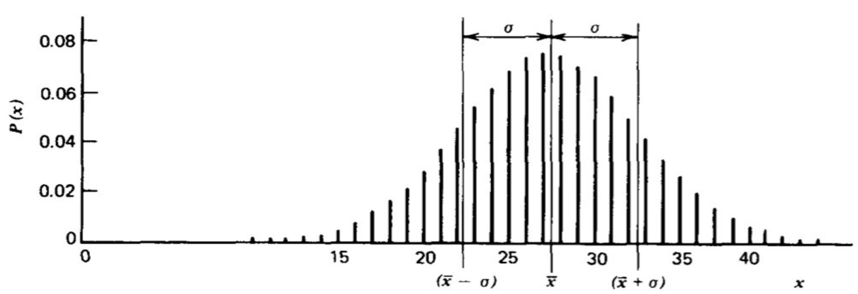
• Le développement de cette relation permet d'écrire : $s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$

3. Les Modèles Statistiques

- Dans une expérience, une mesure est définie par le nombre de succès (de réussite) par rapport au nombre total des essais *n*. Chaque essai est alors un processus binaire, c-à-d il peut être un succès de probabilité *p* constante ou il peut être un non-succès.
- Le tableau suivant donne des exemples de processus binaire.

Évènement, processus ou tirage	**Définition du succès ou de la réussite**	**Probabilité de réussite p**
Lancé de pièce de monnaie (Pile ou Face)	Face	1//2
Lancé de dé	Le six	1//6
Observation d'un noyau radioactif à l'instant *t*	Réaction de désintégration durant l'observation	$(1 - e^{-\lambda t})$

- Les résultats de plusieurs répétitions d'une mesure peuvent être décrits par une fonction de distribution. On introduit ici trois modèles statistiques : la Distribution Binomiale, la Distribution de Poisson et la Distribution Normale ou de Gauss
- Les conditions d'utilisation de ces modèles, les formulations mathématiques et les caractéristiques sont résumés dans le tableau suivant :

Distributions	**Conditions d'application**	**la Fonction de Distribution de Probabilité**	**Caractéristiques**
Distribution Binomiale	les processus de probabilité constante et pour un nombre limité d'évènements	$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\,p^x(1-p)^{n-x}$$	* La distribution est normalisée : $\sum_{x=0}^{n} P(x) = 1$ * La valeur moyenne de la distribution : $\bar{x} = \sum_{x=0}^{n} xP(x) = pn$ * La variance, notée σ^2 : $\sigma^2 \equiv \sum_{x=0}^{n} (x-\bar{x})^2 P(x) = np(1-p)$ *La déviation standard σ : $\sigma = \sqrt{\bar{x}(1-p)}$
Distribution de Poisson	la probabilité de processus est constante et petite	$$P(x) = \frac{(pn)^x e^{-pn}}{x!}$$	* $\sum_{x=0}^{n} P(x) = 1$ * $\bar{x} = \sum_{x=0}^{n} xP(x) = pn$ * $\sigma^2 \equiv \sum_{x=0}^{n} (x-\bar{x})^2 P(x) = pn$ * $\sigma = \sqrt{\bar{x}}$
Distribution Normale ou de Gauss	Elle est essentiellement utilisée pour un grand nombre d'évènements ($\bar{x}_{exp}$> 20 ou 30)	$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}}\exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{x}}\right)$$	
			

4. Applications

<u>Application A</u> : Vérification de la consistance entre les Fluctuations Expérimentales et les Fluctuations Statistiques Prédites → Le bon fonctionnement du système de comptage

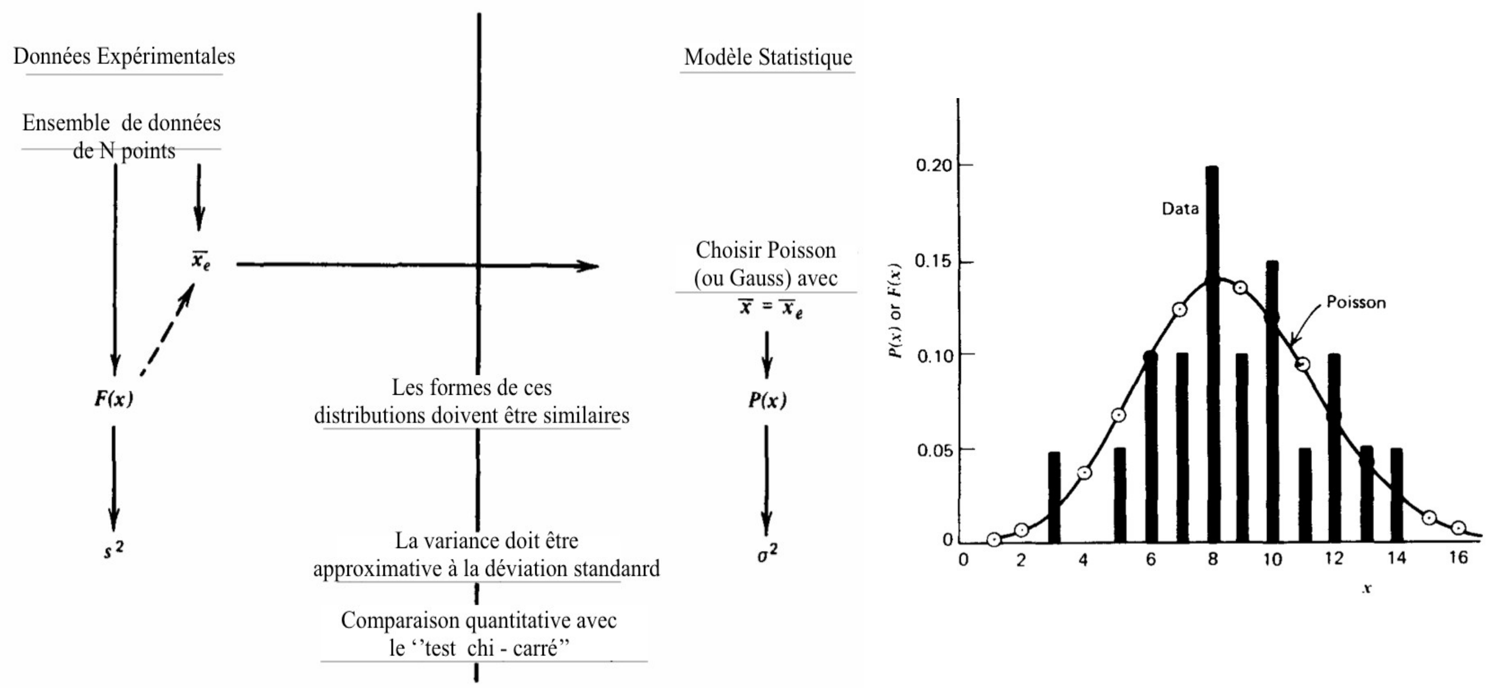


Figure 2 : A gauche, Illustration de l'Application A de statistiques de comptage – Examination de consistance entre données expérimentales et modèle statistique. **A** droite, Une comparaison directe entre des données expérimentales et des prédictions d'un modèle statistique (distribution de Poisson avec $\overline{x}$ = 8.8).

Le test chi-carré χ^2 : $\chi^2 \equiv \frac{1}{\overline{x}_e} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}_e)^2$ et $\chi^2 = \frac{(N-1)s^2}{\overline{x}_e}$

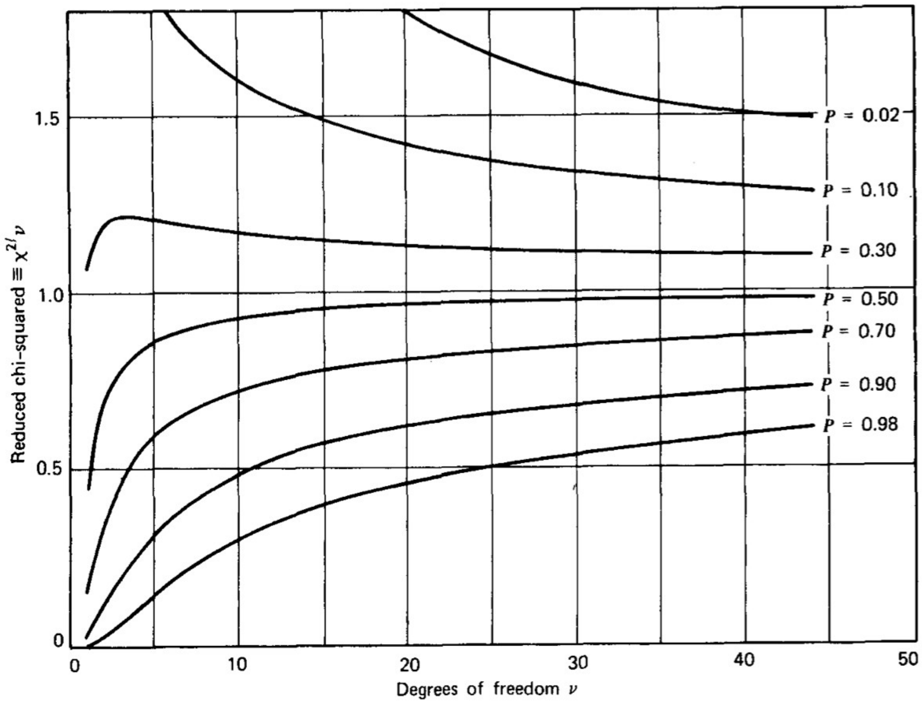


Figure 3 : Courbes de distribution de chi-carré réduite χ^2/ν en fonction du degré de liberté $\nu = N\text{-}1$ et en fonction de probabilité *p*.

Application B : Estimation de la Précision d'une seule Mesure

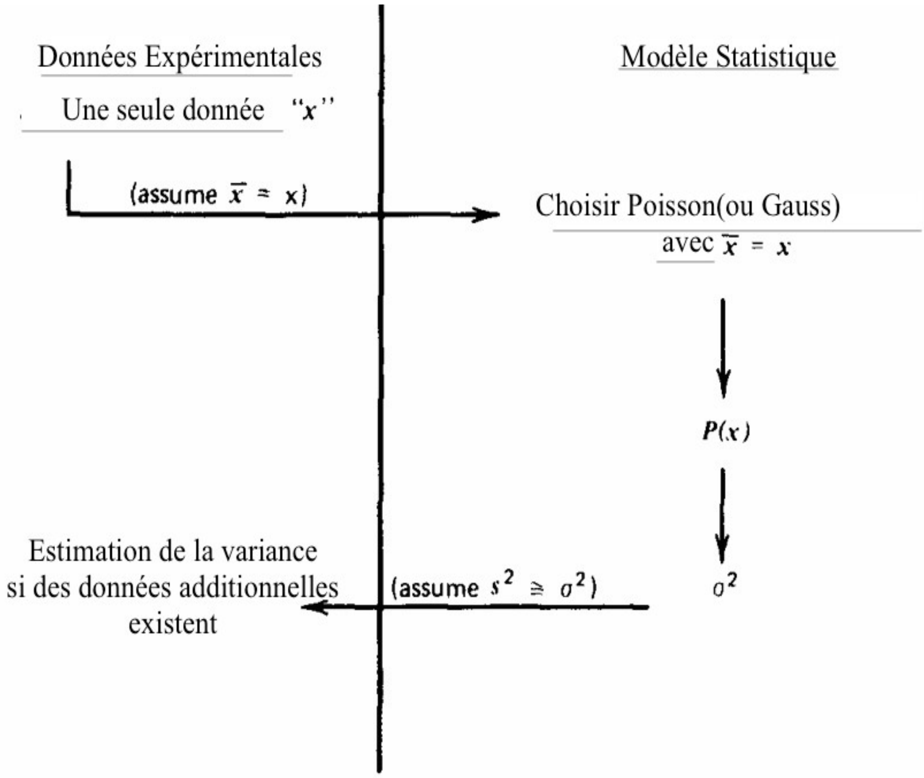


Figure 4 : Une illustration de l'Application B de statistiques de comptage – prédiction de la précision associée à une seule mesure.